Chapitre 1
Compléments d'algèbre linéaire

Exercice 1 : On considère $(n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ avec $n_1 < \cdots < n_p$. On montre que $(f_{n_1}, \ldots, f_{n_p})$ est libre. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_{n_1} + \cdots + \lambda_p f_{n_p} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 x^{n_1} e^x + \cdots + \lambda_p x^{n_p} e^x = 0. \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 x^{n_1} + \cdots + \lambda_p x^{n_p} = 0. \end{aligned}$$

Par liberté de la famille $(x \mapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}}$, on en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Ainsi, la famille $(f_{n_1}, \ldots, f_{n_p})$, donc la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

Exercice 2 :

1. Pour calculer l'intégrale, on utilise la formule trigonométrique

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right).$$

On a donc

$$I_{m,n} = \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} \cos((m+n)t) + \cos((m-n)t)\right).$$

Si $m \neq n$, on obtient

$$I_{m,n} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin((m+n)t) + \frac{1}{m-n}\sin((m-n)t)\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Si $m = n$, on obtient

$$I_{m,m} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin((m+n)t) + t\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

2. On considère $(n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ avec $n_1 < \cdots < n_p$. On montre que $(f_{n_1}, \ldots, f_{n_p})$ est libre. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\lambda_1 f_{n_1} + \cdots + \lambda_p f_{n_p} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \cos(n_1 x) + \cdots + \lambda_p \cos(n_p x) = 0.$$

Si on multiplie par $\cos(n_k x)$ pour un entier $k \in [\![1, p]\!]$, puis qu'on intègre entre 0 et 2π, on obtient la relation

$$\lambda_1 I_{n_1, n_k} + \cdots + \lambda_p I_{n_p, n_k} = 0.$$

En simplifiant avec la question précédente, on en déduit $\lambda_k = 0$. Ainsi, la famille $(f_{n_1}, \ldots, f_{n_p})$, donc la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

Exercice 3 : On considère $(n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ avec $n_1 < \cdots < n_p$. On montre que $(f_{n_1}, \ldots, f_{n_p})$ est libre. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\lambda_1 f_{n_1} + \cdots + \lambda_p f_{n_p} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 e^{n_1 x} + \cdots + \lambda_p e^{n_p x} = 0.$$

En divisant par $e^{n_p x}$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 e^{(n_1 - n_p)x} + \cdots + \lambda_{p-1} e^{(n_{p-1} - n_p)x} + \lambda_p = 0.$$

En prenant la limite quand $x \to +\infty$, on obtient $\lambda_p = 0$. En itérant la méthode, on trouve $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Ainsi, la famille $(f_{n_1}, \ldots, f_{n_p})$, donc la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

Exercice 4 : On a

$$H_1 = \text{Vect}\big((1,0,1,0), (0,1,0,1)\big) \quad \text{et} \quad H_2 = \text{Vect}\big((1,0,0,-1), (0,1,-1,0)\big).$$

Ainsi, on a

$$F \oplus G \oplus H_1 = \text{Vect}\big(\underbrace{(1,0,0,1), (1,1,1,1), (1,0,1,0), (0,1,0,1)}_{\mathscr{F}}\big).$$

La famille $\mathscr{F}$ n'étant pas libre, on en déduit que la somme de F, G et H_1 n'est pas directe. D'autre part, on a

$$F \oplus G \oplus H_2 = \text{Vect}\big(\underbrace{(1,0,0,1), (1,1,1,1), (1,0,0,-1), (0,1,-1,0)}_{\mathscr{F}}\big).$$

La famille $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, donc on en déduit que la somme de F, G et H_2 est directe.

Exercice 5 : Soit $\varphi \in E$. On montre l'existence et l'unicité de la décomposition selon $F + G + H$.

- **Unicité :** Supposons que $\varphi = f + g + h$ avec $(f, g, h) \in F \times G \times H$. Alors, comme g est linéaire et h est constante, on a $h : x \mapsto \varphi(0)$. De plus, en dérivant, on obtient $g : x \mapsto \varphi'(0) \cdot x$. Finalement, on en déduit que $f : x \mapsto \varphi - \varphi(0) - \varphi'(0) \cdot x$. Ainsi f, g et h sont uniquement déterminé par φ, d'où l'unicité de la décomposition.
- **Existence :** On pose

$$f : x \mapsto \varphi - \varphi(0) - \varphi'(0) \cdot x, \quad g : x \mapsto \varphi'(0) \cdot x, \quad h : x \mapsto \varphi(0).$$

  On a $\varphi = f + g + h$, $f \in F$, $g \in G$ et $h \in H$.

Finalement, on a montré que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 6 :

1. Une base de H est $\big((1, -1, 0), (1, 0, -1)\big)$. On a donc

$$H + D = \text{Vect}\big((1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 0, 1)\big).$$

   Comme la famille $\big((1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 0, 1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que la somme $H + D$ est directe et que $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$.
2. On a

$$u(H) = \text{Vect}\big(u(1, -1, 0), u(1, 0, -1)\big) = \text{Vect}\Big(\underbrace{(0, -1, 1)}_{\in H}, \underbrace{(0, 0, 0)}_{\in H}\Big) \subset H,$$

   donc H est stable par u. De même, on a

$$u(D) = \text{Vect}\big(u(1, 0, 1)\big) = \text{Vect}\Big(\underbrace{(2, 0, 2)}_{\in D}\Big) \subset D,$$

   donc D est stable par u.
3. On considère la base de $\mathbb{R}^3$

$$\mathscr{B} = \Big(\underbrace{(1, -1, 0), (1, 0, -1)}_{\text{Base de } H}, \underbrace{(1, 0, 1)}_{\text{Base de } D}\Big)$$

   qui est adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$. On a

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 :

1. On a

$$H + D = \text{Vect}\big((1, -3, 0), (0, 1, -1), (3, 1, 1)\big).$$

   Comme la famille $\big((1, -3, 0), (0, 1, -1), (3, 1, 1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que la somme $H + D$ est directe et que $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$.
2. On a

$$u(H) = \text{Vect}\big(u(1, -3, 0), u(0, 1, -1)\big) = \text{Vect}\Big(\underbrace{(-4, 7, 5)}_{\in H}, \underbrace{(1, -4, 1)}_{\in H}\Big) \subset H,$$

   donc H est stable par u. De même, on a

$$u(D) = \text{Vect}\big(u(3, 1, 1)\big) = \text{Vect}\Big(\underbrace{(9, 3, 3)}_{\in D}\Big) \subset D,$$

   donc D est stable par u.
3. La matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 :

1. On a

$$H + D = \text{Vect}(1, X^2, X).$$

   Comme la famille $(1, X^2, X)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, on en déduit que la somme $H + D$ est directe et que $\mathbb{R}_2[X] = H \oplus D$.

2. On a
$$u(H) = \mathrm{Vect}(u(1), u(X^2)) = \mathrm{Vect}(X^2, 1) \subset H,$$
donc H est stable par u. De même, on a
$$u(D) = \mathrm{Vect}(u(X)) = \mathrm{Vect}(X) \subset D,$$
donc D est stable par u.

3. La matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 : Si $x \in \mathrm{Ker}(u)$, alors $u(x) = 0 \in \mathrm{Ker}(u)$, donc $\mathrm{Ker}(u)$ est stable par u. Si $x \in \mathrm{Im}(u)$, alors $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ par définition de l'image, donc $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u.

Exercice 10 : L'application $\mathrm{Tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est linéaire. De plus, $\mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n) = n \neq 0$, donc l'application Tr n'est pas nulle. On en déduit d'après le cours, que $H = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11 : Supposons par l'absurde qu'il existe deux telles matrices. Alors
$$0 = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n) = n,$$
ce qui n'est pas vrai.

Exercice 12 : Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A^p) = \mathrm{Tr}(A^{p-1}A) &= \mathrm{Tr}(A^{p-1}(AB - BA)) \\ &= \mathrm{Tr}(A^pB) - \mathrm{Tr}(A^{p-1}(BA)) \\ &= \mathrm{Tr}(A^pB) - \mathrm{Tr}((BA)A^{p-1}) \\ &= \mathrm{Tr}(A^pB) - \mathrm{Tr}(BA^p) = 0. \end{aligned}$$

Exercice 13 : On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Dans le premier cas, on a
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \mathrm{Tr}(u) = 2.$$
Dans le second cas, on a
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \mathrm{Tr}(u) = 3.$$

Exercice 14 : On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Dans le premier cas, on a
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \mathrm{Tr}(u) = 4.$$
Dans le second cas, on a
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \mathrm{Tr}(u) = 0.$$
Dans le troisième cas, on a
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \mathrm{Tr}(u) = 7.$$

Exercice 15 :

1. D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - 1$. On fixe une base $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ de $\mathrm{Ker}(u)$ que l'on complète en une base $\mathscr{B} =$

$(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ de E par le théorème de la base incomplète. Par construction, on a

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

2. En effectuant le produit matriciel, on a $M^2 = \alpha_n M$. Or $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(M) = \alpha_n$. Comme M^2 est la matrice de u^2 et M est la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$, on obtient $u^2 = \mathrm{Tr}(u)u$.

Exercice 16 :

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ équivaut à montrer

$$E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}.$$

- Soit $x \in E$. On peut écrire $x = (x - p(x)) + p(x)$. Le vecteur $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et

$$p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0,$$

donc $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$. Ainsi $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$.

- Soit $y \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$. Comme $y \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. On a

$$y = p(x) = p^2(x) = p(y) = 0$$

car $y \in \mathrm{Ker}(p)$. Ainsi $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$. On peut écrire $x = (x - p(x)) + p(x)$. Le vecteur $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et

$$p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0,$$

donc $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$. Finalement, on a montré que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

2. Si $(u_1, \dots, u_k)$ est une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et $(v_1, \dots, v_r)$ une base de $\mathrm{Im}(p)$, alors

$$\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r)$$

est une base de E. De plus, comme p est un projecteur, on a $p(u_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ et $p(v_j) = v_j$ pour tout $j \in [\![1, r]\!]$. En notant, la matrice par bloc, on trouve

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} \mathrm{O}_{k,k} & \mathrm{O}_{k,r} \\ \mathrm{O}_{r,k} & \mathrm{I}_r \end{pmatrix}.$$

3. Le rang de la matrice M est r qui est aussi sa trace. On en déduit que $\mathrm{rang}(u) = r = \mathrm{Tr}(u)$.

Exercice 17 :

1. Montrons que $S_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - La matrice nulle est symétrique.
   - Si $M, N \in S_n(\mathbb{R})$, alors

$$(M + N)^{\mathrm{T}} = M^{\mathrm{T}} + N^{\mathrm{T}} = M + N,$$

donc $M + N \in S_n(\mathbb{R})$.

   - Si $M \in S_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$(\lambda M)^{\mathrm{T}} = \lambda M^{\mathrm{T}} = \lambda M,$$

donc $\lambda M \in S_n(\mathbb{R})$.

On a montré que $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrons que $A_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - La matrice nulle est antisymétrique.
   - Si $M, N \in A_n(\mathbb{R})$, alors

$$(M + N)^{\mathrm{T}} = M^{\mathrm{T}} + N^{\mathrm{T}} = -M - N = -(M + N),$$

donc $M + N \in A_n(\mathbb{R})$.

   - Si $M \in A_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$(\lambda M)^{\mathrm{T}} = \lambda M^{\mathrm{T}} = -\lambda M,$$

donc $\lambda M \in A_n(\mathbb{R})$.

On a montré que $A_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ équivaut à montrer
$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}.$$
   - Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose
   $$S = \frac{1}{2}(M + M^{\mathrm{T}}) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}(M - M^{\mathrm{T}}).$$
   On a $M = S + A$ et
   $$S^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}(M^{\mathrm{T}} + M) = S \quad \text{et} \quad A^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}(M^{\mathrm{T}} - M) = -A,$$
   donc $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$.
   - Soit $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$. On a $M = M^{\mathrm{T}} = -M$, donc $M = 0$. Ainsi $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$.

   Finalement, on a montré que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
3. En appliquant la question précédent, on trouve
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
4. En notant $(E_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient qu'une base de $S_n(\mathbb{R})$ est composé des $E_{ij} + E_{ji}$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ et une base de $A_n(\mathbb{R})$ est composé des $E_{ij} - E_{ji}$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$. En comptant le nombre d'éléments dans ces bases, on trouve
$$\dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Exercice 18 : On raisonne par équivalence.
$$(AB)^{\mathrm{T}} = AB \quad \Leftrightarrow \quad B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = AB \quad \Leftrightarrow \quad BA = AB.$$
Donc AB est symétrique ssi A et B commutent.

Exercice 19 : On a
$$(MM^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (M^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}} = MM^{\mathrm{T}}$$
et de même
$$(M^{\mathrm{T}}M)^{\mathrm{T}} = M^{\mathrm{T}}(M^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = M^{\mathrm{T}}M,$$
donc MM^{T} et $M^{\mathrm{T}}M$ sont symétriques.

Exercice 20 :

1. On a $X^{\mathrm{T}}X = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Or une somme de nombres réels positifs est nulle si et seulement si chacun des nombres sont nuls. Ainsi,
$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 = \cdots = x_n^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \cdots = x_n = 0.$$
   Ainsi $X = 0$ si et seulement si $X^{\mathrm{T}}X = 0$.
2. On montre les deux inclusions.
   - Si $X \in \mathrm{Ker}(M)$, alors
   $$M^{\mathrm{T}}MX = M^{\mathrm{T}}0 = 0,$$
   donc $X \in \mathrm{Ker}(M^{\mathrm{T}}M)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(M) \subset \mathrm{Ker}(M^{\mathrm{T}}M)$.
   - Réciproquement, si $X \in \mathrm{Ker}(M^{\mathrm{T}}M)$, notons $Y = MX$. On a
   $$Y^{\mathrm{T}}Y = X^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}MX = X^{\mathrm{T}}0 = 0.$$
   D'après la première question, on en déduit que $Y = MX = 0$, donc $X \in \mathrm{Ker}(M)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(M^{\mathrm{T}}M) \subset \mathrm{Ker}(M)$.

   Finalement, $\mathrm{Ker}(M^{\mathrm{T}}M) = \mathrm{Ker}(M)$.